

凸多面体不确定线性系统的新的参数依赖有界实引理

胡 军, 陈东彦, 赵岩峰

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 研究了凸多面体不确定线性系统的鲁棒 H_∞ 性能问题, 通过提高参数依赖线性矩阵不等式关于不确定参数的阶次, 给出了线性矩阵不等式描述的鲁棒 H_∞ 性能准则, 并进一步给出针对不同阶次的线性矩阵不等式表示, 比较分析说明了随着阶次的增大, 判别条件的保守性逐渐减少.

关键词: 不确定线性系统; 参数依赖 Lyapunov 函数; 鲁棒 H_∞ 性能; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP27 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2010)04-0049-06

New Parameter-dependent Bounded Real Lemma for Linear Systems with Polytopic Uncertainties

HU Jun, CHEN Dong-yan, ZHAO Yan-feng

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: The problem of robust H_∞ performance of linear systems with convex polytopic uncertainties is investigated in this paper. By improving the degree of parameter-dependent linear matrix inequality with dependence on the uncertain parameters, the linear matrix inequality (LMI) representations of robust H_∞ performance criteria are given. In addition, the linear matrix inequality representations for different degrees are presented. Comparison analysis shows that the conservativeness of the presented conditions decreases with the increase of the degrees.

Key words: uncertain linear systems; parameter-dependent Lyapunov function; robust H_∞ performance; LMI

0 引 言

H_∞ 性能自提出以来一直是鲁棒控制中的一个重要的性能指标. H_∞ 性能可以加强不确定模型的鲁棒性, 增强抑制外部扰动输入的能力, 也可以表示频域的指标, 得到了广大学者的关注, 现已涌现了大量的研究成果. 凸多面体不确定系统是鲁棒控制在时域范围内所研究的一类重要的不确定系统, 线性矩阵不等式技术^[1-4], 对凸多面体不确定系统的研究起到了重要推动作用.

文 [5] 提出了著名的有界实引理. 文 [6] 首次研

究了基于 LMI 方法的凸多面体不确定线性系统的 H_2, H_∞ 的保性能计算问题. 文 [7] 进一步讨论了不确定系统的鲁棒 H_∞ 性能问题. 文 [8] 给出了更少保守性的 H_∞ 性能充分条件和参数依赖 Lyapunov 函数的构造方法. 本文沿着一条新的思路出发, 研究了线性凸多面体不确定系统的鲁棒 H_∞ 性能计算问题, 通过提高参数依赖线性矩阵不等式关于不确定参数的阶次及构造参数依赖 Lyapunov 函数, 得到了一些更少保守性的线性矩阵不等式表述的鲁棒 H_∞ 性能准则. 最后, 针对不确定域中矩阵顶点个数 $N=3$ 的情况, 比较分析了保守性的来源, 随着参数依赖线性矩阵不等式关于不确定参数的阶次 m 的增大, 条件

收稿日期: 2008-07-21

基金项目: 国家自然科学基金(10771047); 黑龙江省教育厅海外学人项目(1152hq09)

作者简介: 胡 军(1984—), 男, 硕士研究生, E-mail: hu_jun2008@yahoo.com.cn;

陈东彦(1964—), 女, 教授, 博士生导师.

被放松,保守性在递减,更向必要性逼近.

符号说明:在下文中, $\text{sym}(A) = A + A^T$; s. t. 是“满足”的缩写; 矩阵中的“*”,代表矩阵相应块的转置.

1 问题描述

考虑如下不确定线性系统:

$$\begin{cases} \delta x(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\omega(t) \\ y(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)\omega(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\delta x(t)$ 表示 $\dot{x}(t)$ (连续情形); $x(k+1)$ (离散情形); $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量; $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ 为输入信号; $y(t) \in \mathbb{R}^p$ 为被控输出信号. 假设不确定线性系统矩阵可以表示为若干个顶点矩阵的凸组合,即

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= (A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha), D(\alpha)) \in \Omega, \\ \Omega &= \{M(\alpha) \mid M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \alpha \in \Gamma\} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $M_i = (A_i, B_i, C_i, D_i)$ 为多面体 Ω 的顶点矩阵,

$$\Gamma = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

假设对于任意的 $\alpha \in \Gamma$, $A(\alpha)$ 是渐近稳定的. 对于任意确定的 α , 将系统输入信号 $\omega(t)$ 到输出信号 $y(t)$ 的传递函数表示为

$$T(\tau, \alpha) = C(\alpha)(\tau I - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha) \quad (3)$$

问题: 对于所有的不确定参数 $\alpha \in \Gamma$, 确定传递函数(3)的 H_∞ 范数的上界 γ , 即

$$\|T(\tau, \alpha)\|_\infty < \gamma, \forall (A, B, C, D)(\alpha) \in \Omega \quad (4)$$

最优的 H_∞ 保性能值可以通过求解如下优化问题得到:

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \min \gamma \\ \text{s. t. 式(4)} \end{aligned} \quad (5)$$

首先给出如下引理.

引理1^[8] 凸多面体不确定线性系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_\infty < \gamma$ 的充要条件为存在一个矩阵函数 $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, 满足

连续系统

$$M(\alpha) = \begin{bmatrix} M_{11}(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) & C^T(\alpha) \\ * & -\gamma^2 I & D^T(\alpha) \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

离散系统

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 & J_{13}(\alpha) & J_{14}(\alpha) \\ * & -I & C(\alpha) & D(\alpha) \\ * & * & -P(\alpha) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

其中, $P(\alpha)$ 是待确定的参数依赖 Lyapunov 矩阵, 定义为

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i, \alpha \in \Gamma \quad (8)$$

而 $M_{11}(\alpha) = \text{sym}(P(\alpha)A(\alpha))$,

$$J_{13}(\alpha) = P(\alpha)A(\alpha), J_{14}(\alpha) = P(\alpha)B(\alpha).$$

2 新的连续系统的参数依赖有界实引理

定理1 凸多面体不确定连续线性系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_\infty < \gamma$, 如果存在一个矩阵函数 $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, 满足

$$M_m(\alpha) = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ * & -\gamma^2 I & M_{23} \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

其中 $P(\alpha)$ 如式(8)所示, 而

$$M_{11} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{m-1} \text{sym}(P(\alpha)A(\alpha))$$

$$M_{12} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^{m-1} P(\alpha)B(\alpha)$$

$$M_{13} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^m C^T(\alpha),$$

$$M_{23} = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^m D^T(\alpha)$$

证明: 注意到 $\alpha \in \Gamma$, 故 $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$, 于是不等式(9)与不等式(6)等价, 定理得证.

令 $m = 1$, 可以得到一个充分条件表述为下面推论.

推论1 凸多面体不确定连续线性系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_\infty < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$M^{(i)} = \begin{bmatrix} \text{sym}(P_i A_i) & P_i B_i & C_i^T \\ * & -\gamma^2 I & D_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (10)$$

$$M^{(ij)} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(ij)} & P_i B_j + P_j B_i & C_i^T + C_j^T \\ * & -2\gamma^2 I & D_i^T + D_j^T \\ * & * & -2I \end{bmatrix} < 0,$$

$$i=1,2,\dots,N-1, j=i+1,\dots,N \quad (11)$$

其中 $M_{11}^{(ij)} = \text{sym}(P_i A_j + P_j A_i)$

证明: 若定理 1 中 $m=1$, 结合式 (2) 和式 (8), 此时 $M_m(\alpha)$ 可以写成

$$M_1(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 M^{(i)} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j M^{(ij)} \quad (12)$$

注意到式 (10) 和式 (11), 有 $M_1(\alpha) < 0$. 因此, 由定理 1 知凸多面体不确定连续线性系统 (1) 鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$. 推论得证.

注 1: 推论 1 将系统 (1) 的鲁棒 H_{∞} 性能准则转化为一个线性矩阵不等式组的可解性问题. 注意到, 式 (10) 和式 (11) 不仅是关于矩阵变量 P_i , 也是关于标量 γ^2 的线性矩阵不等式组. 因此可以将 γ^2 作为一个优化变量来获得系统的最优扰动衰减水平, 求解如下的凸优化问题:

$$(CP)_1: \min_{P_i, \delta} \delta \quad \text{s. t. 式(10), (11)} \quad (13)$$

其中 $\delta = \gamma^2$, 则最优扰动衰减水平为 $\gamma^* = \sqrt{\delta^+}$, δ^+ 为 δ 的最优值.

令 $m=2$, 可以得到一个充分条件, 表述为下面推论.

推论 2 凸多面体不确定连续线性系统 (1) 鲁棒稳定, 且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i=1, 2, \dots, N$, 满足

$$\hat{M}^{(i)} = M^{(i)}, i=1, 2, \dots, N \quad (14)$$

$$\hat{M}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(ij)} & \hat{M}_{12}^{(ij)} & 2C_i^T + C_j^T \\ * & -3\gamma^2 I & 2D_i^T + D_j^T \\ * & * & -3I \end{bmatrix} < 0$$

$$i=1, 2, \dots, N, j \neq i, j=1, 2, \dots, N \quad (15)$$

其中 $\hat{M}_{11}^{(ij)} = \text{sym}(P_i A_i + P_i A_j + P_j A_i)$

$$\hat{M}_{12}^{(ij)} = P_i B_i + P_i B_j + P_j B_i$$

$$\hat{M}^{(ijk)} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(ijk)} & \hat{M}_{12}^{(ijk)} & \hat{M}_{13}^{(ijk)} \\ * & -6\gamma^2 I & \hat{M}_{23}^{(ijk)} \\ * & * & -6I \end{bmatrix} < 0$$

$$i=1, \dots, N-2, \\ j=i+1, \dots, N-1, \\ k=j+1, \dots, N \quad (16)$$

其中

$$\hat{M}_{11}^{(ijk)} = \text{sym}(P_i A_j + P_i A_k + P_j A_i + P_j A_k + P_k A_i + P_k A_j)$$

$$\hat{M}_{12}^{(ijk)} = P_i B_j + P_i B_k + P_j B_i + P_j B_k + P_k B_i + P_k B_j$$

$$\hat{M}_{13}^{(ijk)} = 2(C_i^T + C_j^T + C_k^T)$$

$$\hat{M}_{34}^{(ijk)} = 2(D_i^T + D_j^T + D_k^T)$$

证明: 类似于推论 1 的证明, 此时 $M_m(\alpha)$ 可以写成

$$M_2(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 \hat{M}^{(i)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \alpha_i^2 \alpha_j \hat{M}^{(ij)} + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \alpha_i \alpha_j \alpha_k \hat{M}^{(ijk)} \quad (17)$$

同理可证定理 1 中条件是成立的, 即凸多面体不确定线性系统 (1) 鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$. 推论得证.

注 2: 与推论 1 类似, 推论 2 亦将系统 (1) 的鲁棒 H_{∞} 性能准则转化为一个线性矩阵不等式组的可解性问题. 因此可以通过求解如下的凸优化问题 $(CP)_2$, 来获得系统的最优扰动衰减水平 γ :

$$(CP)_2: \min_{P_i, \delta} \delta \quad \text{s. t. (14), (15), (16)} \quad (18)$$

其中 $\delta = \gamma^2$, 则最优扰动衰减水平为 $\gamma^* = \sqrt{\delta^+}$, δ^+ 为 δ 的最优值.

令 $m=3$, 可以得到一个充分条件表述为下面推论.

推论 3 凸多面体不确定连续线性系统 (1) 鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i=1, 2, \dots, N$, 满足

$$\hat{M}^{(i)} = M^{(i)}, i=1, 2, \dots, N \quad (19)$$

$$\hat{M}^{(1)(ij)} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(ij)} & \hat{M}_{12}^{(ij)} & 3C_i^T + C_j^T \\ * & -4\gamma^2 I & 3D_i^T + D_j^T \\ * & * & -4I \end{bmatrix} < 0$$

$$i=1, 2, \dots, N, j \neq i, j=1, 2, \dots, N \quad (20)$$

其中 $\hat{M}_{11}^{(1)(ij)} = \text{sym}(P_i A_j + P_j A_i + 2P_i A_i)$

$$\hat{M}_{12}^{(1)(ij)} = P_i B_j + P_j B_i + 2P_i B_i$$

$$\hat{M}^{(2)(ij)} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(2)(ij)} & \hat{M}_{12}^{(2)(ij)} & 3C_i^T + 3C_j^T \\ * & -6\gamma^2 I & 3D_i^T + 3D_j^T \\ * & * & -6I \end{bmatrix} < 0$$

$$i=1, 2, \dots, N-1, j=i+1, \dots, N \quad (21)$$

其中

$$\hat{M}_{11}^{(2)(ij)} = \text{sym}(2P_i A_j + 2P_j A_i + P_i A_i + P_j A_j)$$

$$\hat{M}_{12}^{(2)(ij)} = 2P_i B_j + 2P_j B_i + P_i B_i + P_j B_j$$

$$\hat{M}^{(ijk)} = \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(ijk)} & \hat{M}_{12}^{(ijk)} & \hat{M}_{13}^{(ijk)} \\ * & -12\gamma^2 I & \hat{M}_{23}^{(ijk)} \\ * & * & -12I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$k \neq i, k = j+1, \dots, N \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{M}_{11}^{(ijk)} &= \text{sym}(2P_i A_i + 2P_i A_j + 2P_j A_i + 2P_i A_k + \\ &\quad 2P_k A_i + P_k A_j + P_j A_k) \\ \hat{M}_{12}^{(ijk)} &= 2P_i B_i + 2P_i B_j + 2P_j B_i + 2P_i B_k + \\ &\quad 2P_k B_i + P_k B_j + P_j B_k \\ \hat{M}_{13}^{(ijk)} &= 6C_i^T + 3C_j^T + 3C_k^T \\ \hat{M}_{23}^{(ijk)} &= 6D_i^T + 3D_j^T + 3D_k^T \\ \hat{M}^{(ijkl)} &= \begin{bmatrix} \hat{M}_{11}^{(ijkl)} & \hat{M}_{12}^{(ijkl)} & \hat{M}_{13}^{(ijkl)} \\ * & -3\gamma^2 I & \hat{M}_{23}^{(ijkl)} \\ * & * & -3I \end{bmatrix} < 0, \\ i &= 1, 2, \dots, N, N \geq 4, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N-2, \\ k &\neq i, k = j+1, \dots, N-1, l \neq i, l = k+1, \dots, N \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{M}_{11}^{(ijkl)} &= \text{sym}(P_j A_i + P_k A_i + P_l A_i) \\ \hat{M}_{12}^{(ijkl)} &= P_j B_i + P_k B_i + P_l B_i \\ \hat{M}_{13}^{(ijkl)} &= C_j^T + C_k^T + C_l^T \\ \hat{M}_{23}^{(ijkl)} &= D_j^T + D_k^T + D_l^T \\ \text{证明: 类似于推论 1 的证明过程, 此时 } M_m(\alpha) & \\ \text{可以写成} & \\ M_3(\alpha) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^4 \hat{M}^{(i)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^N \alpha_i^3 \alpha_j \hat{M}^{(1)(ij)} + \\ &\quad \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i^2 \alpha_j^2 \hat{M}^{(2)(ij)} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N-1} \sum_{\substack{k \neq i \\ k=j+1}}^N \alpha_i^2 \alpha_j \alpha_k \hat{M}^{(ijk)} + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N-2} \sum_{\substack{k \neq i \\ k=j+1}}^{N-1} \sum_{l \neq i}^N \alpha_i^2 \alpha_j \alpha_k \alpha_l \hat{M}^{(ijkl)} \end{aligned} \quad (24)$$

同理可证定理 1 中条件是成立的, 即凸多面体不确定线性系统 (1) 鲁棒稳定, 且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$. 推论得证.

注 3: 与推论 1 类似, 推论 3 亦将系统 (1) 的鲁棒 H_{∞} 性能准则转化为一个线性矩阵不等式组的可解性问题. 因此可以通过求解如下的凸优化问题 (CP)₃, 来获得系统的最优扰动衰减水平 γ .

$$(CP)_3: \min_{P, \delta} \delta$$

$$\text{s. t. (19), (20), (21), (22), (23)} \quad (25)$$

其中 $\delta = \gamma^2$, 则最优扰动衰减水平为 $\gamma^* = \sqrt{\delta^*}$, δ^* 为 δ 的最优值.

3 新的离散系统的参数依赖有界实引理

上一节中处理连续系统的方法可以推广到离散情况, 故本节只叙述定理内容, 证明省略.

定理 2 凸多面体不确定离散线性系统 (1) 鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(z, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在一个矩阵函数 $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$, 满足

$$J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} J_{11}(\alpha) & 0 & J_{13}(\alpha) & J_{14}(\alpha) \\ * & -I & J_{23}(\alpha) & J_{24}(\alpha) \\ * & * & J_{33}(\alpha) & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

其中 $P(\alpha)$ 如式 (8) 所示, 而

$$\begin{aligned} J_{11}(\alpha) &= J_{33}(\alpha) = -\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^m P(\alpha) \\ J_{13}(\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^{m-1} P(\alpha) A(\alpha) \\ J_{14}(\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^{m-1} P(\alpha) B(\alpha) \\ J_{23}(\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^m C(\alpha), J_{24}(\alpha) = \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^m D(\alpha) \end{aligned}$$

令 $m = 1$, 可以得到一个充分条件表述为下面推论.

推论 4 凸多面体不确定离散线性系统 (1) 鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(z, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$J^{(i)} = \begin{bmatrix} -P_i & 0 & P_i A_i & P_i B_i \\ * & -I & C_i & D_i \\ * & * & -P_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

$$J^{(ij)} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(ij)} & 0 & J_{13}^{(ij)} & J_{14}^{(ij)} \\ * & -2I & C_i + C_j & D_i + D_j \\ * & * & J_{33}^{(ij)} & 0 \\ * & * & * & -2\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N \quad (28)$$

其中

$$J_{11}^{(ij)} = J_{33}^{(ij)} = -P_i - P_j$$

$$J_{13}^{(ij)} = P_i A_j + P_j A_i$$

$$J_{14}^{(ij)} = P_i B_j + P_j B_i$$

推论5 凸多面体不确定离散线性系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(z, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$\tilde{J}^{(i)} = J^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (29)$$

$$\tilde{J}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^{(ij)} & 0 & \tilde{J}_{13}^{(ij)} & \tilde{J}_{14}^{(ij)} \\ * & -3I & 2C_i + C_j & 2D_i + D_j \\ * & * & \tilde{J}_{33}^{(ij)} & 0 \\ * & * & * & -3\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N \quad (30)$$

其中

$$\tilde{J}_{11}^{(ij)} = \tilde{J}_{33}^{(ij)} = -2P_i - P_j$$

$$\tilde{J}_{13}^{(ij)} = P_i A_i + P_i A_j + P_j A_i$$

$$\tilde{J}_{14}^{(ij)} = P_i B_i + P_i B_j + P_j B_i$$

$$\tilde{J}^{(ijk)} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^{(ijk)} & 0 & \tilde{J}_{13}^{(ijk)} & \tilde{J}_{14}^{(ijk)} \\ * & -6I & \tilde{J}_{23}^{(ijk)} & \tilde{J}_{24}^{(ijk)} \\ * & * & \tilde{J}_{33}^{(ijk)} & 0 \\ * & * & * & -6\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, \dots, N-2, j = i+1, \dots, N-1, k = j+1, \dots, N \quad (31)$$

其中

$$\tilde{J}_{11}^{(ijk)} = \tilde{J}_{33}^{(ijk)} = -2(P_i + P_j + P_k)$$

$$\tilde{J}_{13}^{(ijk)} = P_i A_j + P_i A_k + P_j A_i + P_j A_k + P_k A_i + P_k A_j$$

$$\tilde{J}_{14}^{(ijk)} = P_i B_j + P_i B_k + P_j B_i + P_j B_k + P_k B_i + P_k B_j$$

$$\tilde{J}_{23}^{(ijk)} = 2(C_i + C_j + C_k)$$

$$\tilde{J}_{24}^{(ijk)} = 2(D_i + D_j + D_k)$$

令 $m = 3$, 可以得到一个充分条件表述为下面

推论.

推论6 凸多面体不确定离散线性系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(z, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$, 如果存在对称正定矩阵 $P_i, i = 1, 2, \dots, N$, 满足

$$\hat{J}^{(i)} = J^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N \quad (32)$$

$$\hat{J}^{(1)(ij)} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11}^{(1)(ij)} & 0 & \hat{J}_{13}^{(1)(ij)} & \hat{J}_{14}^{(1)(ij)} \\ * & -4I & \hat{J}_{23}^{(1)(ij)} & \hat{J}_{24}^{(1)(ij)} \\ * & * & \hat{J}_{33}^{(1)(ij)} & 0 \\ * & * & * & -4\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

其中

$$\hat{J}_{11}^{(1)(ij)} = \hat{J}_{33}^{(1)(ij)} = -3P_i - P_j$$

$$\hat{J}_{13}^{(1)(ij)} = P_i A_j + P_j A_i + 2P_i A_i$$

$$\hat{J}_{14}^{(1)(ij)} = P_i B_j + P_j B_i + 2P_i B_i$$

$$\hat{J}_{23}^{(1)(ij)} = 3C_i + C_j$$

$$\hat{J}_{24}^{(1)(ij)} = 3D_i + D_j$$

$$\hat{J}^{(2)(ij)} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11}^{(2)(ij)} & 0 & \hat{J}_{13}^{(2)(ij)} & \hat{J}_{14}^{(2)(ij)} \\ * & -6I & \hat{J}_{23}^{(2)(ij)} & \hat{J}_{24}^{(2)(ij)} \\ * & * & \hat{J}_{33}^{(2)(ij)} & 0 \\ * & * & * & -6\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, j = i+1, \dots, N \quad (34)$$

其中

$$\hat{J}_{11}^{(2)(ij)} = \hat{J}_{33}^{(2)(ij)} = -3P_i - 3P_j$$

$$\hat{J}_{13}^{(2)(ij)} = 2P_i A_j + 2P_j A_i + P_i A_i + P_j A_j$$

$$\hat{J}_{14}^{(2)(ij)} = 2P_i B_j + 2P_j B_i + P_i B_i + P_j B_j$$

$$\hat{J}_{23}^{(2)(ij)} = 3C_i + 3C_j$$

$$\hat{J}_{24}^{(2)(ij)} = 3D_i + 3D_j$$

$$\hat{J}^{(ijk)} = \begin{bmatrix} \hat{J}_{11}^{(ijk)} & 0 & \hat{J}_{13}^{(ijk)} & \hat{J}_{14}^{(ijk)} \\ * & -12I & \hat{J}_{23}^{(ijk)} & \hat{J}_{24}^{(ijk)} \\ * & * & \hat{J}_{33}^{(ijk)} & 0 \\ * & * & * & -12\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N-1, k \neq i, k = j+1, \dots, N \quad (35)$$

其中

$$\hat{J}_{11}^{(ijk)} = \hat{J}_{33}^{(ijk)} = -6P_i - 3P_j - 3P_k$$

$$\hat{J}_{13}^{(ijk)} = 2P_i A_i + 2P_i A_j + 2P_j A_i + 2P_i A_k + 2P_k A_i + P_k A_j + P_j A_k$$

$$\hat{J}_{14}^{(ijk)} = 2P_i B_i + 2P_i B_j + 2P_j B_i + 2P_i B_k + 2P_k B_i + P_k B_j + P_j B_k$$

$$\hat{J}_{23}^{(ijk)} = 6C_i + 3C_j + 3C_k$$

$$\hat{J}_{24}^{(ijk)} = 6D_i + 3D_j + 3D_k$$

$$\hat{f}^{(ijkl)} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{11}^{(ijkl)} & 0 & \hat{f}_{13}^{(ijkl)} & \hat{f}_{14}^{(ijkl)} \\ * & -3I & \hat{f}_{23}^{(ijkl)} & \hat{f}_{24}^{(ijkl)} \\ * & * & \hat{f}_{33}^{(ijkl)} & 0 \\ * & * & * & -3\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N, N \geq 4, j \neq i, j = 1, 2, \dots, N-2,$$

$$k \neq i, k = j+1, \dots, N-1, l \neq i, l = k+1, \dots, N$$

(36)

其中

$$\begin{aligned} \hat{f}_{11}^{(ijkl)} &= \hat{f}_{33}^{(ijkl)} = -P_j - P_k - P_l \\ \hat{f}_{13}^{(ijkl)} &= P_j A_i + P_k A_i + P_l A_i \\ \hat{f}_{14}^{(ijkl)} &= P_j B_i + P_k B_i + P_l B_i \\ \hat{f}_{23}^{(ijkl)} &= C_j + C_k + C_l \\ \hat{f}_{24}^{(ijkl)} &= D_j + D_k + D_l \end{aligned}$$

4 比较分析

下面分析保守性的来源,仅以连续线性系统为例,考虑凸多面体不确定域中矩阵顶点个数 $N=3$ 的情况.

1) 分析推论 1.1 中的条件,在这种情况下,需要满足下面不等式组

$$\begin{aligned} M^{(1)} > 0, M^{(2)} > 0, M^{(3)} > 0, \\ M^{(12)} > 0, M^{(13)} > 0, M^{(23)} > 0 \end{aligned} \quad (37)$$

才能保证系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$.

2) 分析推论 1.2 中的条件,在这种情况下,需要满足下面不等式组

$$\begin{aligned} M^{(1)} > 0, M^{(2)} > 0, M^{(3)} > 0, M^{(1)} + M^{(12)} > 0, \\ M^{(1)} + M^{(13)} > 0, M^{(2)} + M^{(12)} > 0, M^{(2)} + M^{(23)} > 0, \\ M^{(3)} + M^{(13)} > 0, M^{(3)} + M^{(23)} > 0, \\ M^{(12)} + M^{(13)} + M^{(23)} > 0 \end{aligned} \quad (38)$$

才能保证系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$.

3) 分析推论 1.3 中的条件,在这种情况下,需要满足下面不等式组

$$\begin{aligned} M^{(1)} > 0, M^{(2)} > 0, M^{(3)} > 0, 2M^{(1)} + M^{(12)} > 0, \\ 2M^{(1)} + M^{(13)} > 0, 2M^{(2)} + M^{(12)} > 0, \\ 2M^{(2)} + M^{(13)} > 0, 2M^{(3)} + M^{(13)} > 0, \\ 2M^{(3)} + M^{(23)} > 0, M^{(1)} + M^{(2)} + 2M^{(12)} > 0, \\ M^{(1)} + M^{(3)} + 2M^{(13)} > 0, M^{(2)} + M^{(3)} + 2M^{(23)} > 0, \\ 2M^{(1)} + 2M^{(12)} + 2M^{(13)} + M^{(23)} > 0 \end{aligned} \quad (39)$$

才能保证系统(1)鲁棒稳定且 $\max_{\alpha} \|T(\tau, \alpha)\|_{\infty} < \gamma$.

比较式(37)、式(38)和式(39)可以看出,如果

式(37)有可行解,则式(38)也有可行解,但反之不成立,所以式(37)表示的条件比式(38)表示的条件约束强.类似地,式(38)表示的条件比式(39)表示的条件约束更强.因此,可以得到推论 1.1、推论 1.2 和推论 1.3 中条件依次被放松,保守性在递减.

注 4: 依此类推,如果令 $m=4, 5, \dots$, 则可以得到更多的充分条件.并且随着 m 增大,条件被放松,保守性在递减,更向必要性逼近.另一方面,当 m 增大时,矩阵变量的个数增多, LMI 的个数增多,计算量随之也变大,但随着计算机技术的飞速发展,计算量大不是最大的问题,只要 m 适当即可.

5 结 语

本文针对线性凸多面体不确定系统,沿着一条新的思路出发,通过提高参数依赖线性矩阵不等式关于不确定参数的阶次及构造参数依赖 Lyapunov 函数,展开参数依赖线性矩阵不等式,得到了新的线性凸多面体不确定系统的有界实引理的线性矩阵不等式表述.比较分析讨论了保守性的来源.本文方法可以推广到其他参数依赖线性矩阵不等式问题.

参 考 文 献:

- [1] 张彦虎, 颜文俊, 赵光宙. 线性离散时滞系统的 G_2 状态反馈控制 [J]. 控制与决策, 2007, 22(4): 436-439.
- [2] 刘宏亮, 樊丽颖, 段广仁. 线性时滞系统的鲁棒广义 H_2 弹性控制 [J]. 电机与控制学报, 2008, 12(2): 213-217.
- [3] 魏进进, 陈东彦, 郑红艳. 带有扰动和执行器饱和的离散线性系统的集合不变性条件 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2009, 14(6): 81-83.
- [4] 胡 军, 陈东彦, 赵岩峰. 改进的凸多面体不确定离散线性系统的鲁棒稳定条件 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(2): 99-101.
- [5] LEITE V J S, PERES P L D. An Improved LMI Condition for the Robust D-stability of Uncertain Polytopic Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(3): 500-504.
- [6] 俞 立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [7] PERES P L D, GEROMEL J C, SOUZA S R. Optimal H_{∞} State Feedback Control for Continuous-time Linear Systems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 82(2): 343-359.
- [8] PALHARES R M, TAKAHASHI R H C, PERES P L D. H_{∞}/H_2 Guaranteed Costs Computation for Uncertain Linear Systems [J]. International Journal of Systems Science, 1997, 28(2): 183-188.
- [9] ARZELIER D, HENRION D, PEAUCELLE D. Robust D-stabilization of a Polytope of Matrices [J]. International Journal of Control, 2002, 37: 461-468.

(编辑: 付长缨)